导学案

主编 肖德好

全品学练考

细分课时

分层设计

落实基础

突出重点

高中数学 4

选择性必修第二册 BS

天津出版传媒集团
天津人民出版社

目录 Contents

02 第二章　导数及其应用

PART TWO

导学案 LEARN 第一章　数列

§1　数列的概念及其函数特性

1.1　数列的概念

【学习目标】

了解数列的概念和表示方法(列表、图象、通项公式).

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　数列及其有关概念

1. 数列

按一定________排列的一列数叫作数列.

2. 数列的项

数列中的________叫作这个数列的项. 数列的一般形式可以写成 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$ 或简记为________,其中 a_1 是数列的第 1 项,也叫数列的________;a_n 是数列的第 n 项,也叫数列的________.

3. 数列按项的个数分类

有穷数列:项数________的数列.

无穷数列:项数________的数列.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)某同学从 6 岁到 18 岁,每年在生日那天测量体重,依次排成一列数,可以构成数列.　(　)

(2)数列 $1,2,3,4,\cdots,2n$ 是无穷数列.　(　)

(3) 1,1,1,1 是一个数列.　(　)

◆ 知识点二　数列的通项公式

1. 定义:如果数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与________之间的函数关系可以用一个式子表示成__________,那么这个式子就叫作这个数列的________.

2. 作用:①求数列的任意一项;②检验某数是否是该数列中的一项.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1) 数列 $1,3,5,7,\cdots$ 的第 10 项是 21.　(　)

(2)在数列$\{a_n\}$中,若 $a_{n+1}=2a_n,n\in\mathbf{N}^*$,则 $a_2=2a_1$.　(　)

(3) 每一个数列都能写出通项公式.　(　)

课中探究　考点探究　素养小结

◆ 探究点一　数列的概念与分类

例 1 (1)下列有关数列的说法中正确的是　(　)

A. 同一个数列的任意两项均不可能相同

B. 数列 $-1,0,1$ 与数列 $1,0,-1$ 是同一个数列

C. 数列 1,3,5,7 可表示为$\{1,3,5,7\}$

D. 数列中的每一项都与它的序号有关

(2)已知下列数列:

①0,0,0,0,0,0;

②$0,-1,2,-3,4,-5,\cdots$;

③$0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$;

④$1,0.2,0.2^2,0.2^3,\cdots$;

⑤$0,-1,0,\cdots,\cos\frac{n\pi}{2},\cdots$.

其中,________是有穷数列,________是无穷数列(填序号).

变式 (多选题)下列结论中正确的是　(　)

A. 数列 1,2,3,4 和数列 1,3,4,2 是相同的数列

B. 数列可以看作是一个定义在正整数集(或它的有限子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$)上的函数

C. 数列的图象是一系列孤立的点

D. 数列的项数是无限的

[素养小结]

1. 判断给出的数列是有穷数列还是无穷数列,只需考察该数列的项数是有限的还是无限的.若数列的项数有限,则是有穷数列,否则为无穷数列.

2. 数列 $1,2,\cdots,n$ 是有穷数列,数列 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 是无穷数列.

3. 注意数列与集合的表示有本质的区别:数列有序而集合无序,数列的项可以重复而集合不能有重复元素.

◆ 探究点二　求数列的通项公式

例 2　若数列$\{a_n\}$的前五项分别为$\frac{1}{2}$,$\frac{3}{4}$,$\frac{5}{8}$,$\frac{7}{16}$,$\frac{9}{32}$,则$\{a_n\}$的通项公式可能是　　　(　　)

A. $a_n=\frac{2n+1}{2^n}$　　B. $a_n=\frac{2n-1}{2n}$

C. $a_n=\frac{2n-1}{2^n}$　　D. $a_n=\frac{2n-1}{n+2}$

变式　(1)数列$1,\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{4}{7},\frac{5}{9},\cdots$的一个通项公式是　　　(　　)

A. $a_n=\frac{n}{2n+1}$　　B. $a_n=\frac{n}{2n-1}$

C. $a_n=\frac{n}{2n-3}$　　D. $a_n=\frac{n}{2n+3}$

(2)数列$-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\cdots$的一个通项公式是________.

[素养小结]

根据数列的前几项求其通项公式的解题思路

(1)先统一项的结构,如都化成分数,根式等.

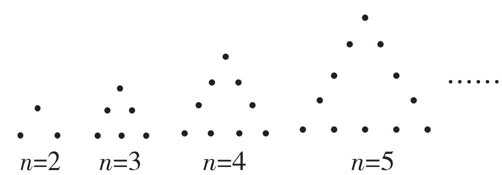
(2)分析结构中变化的部分与不变的部分,探索变化部分的规律与对应序号间的函数解析式.

(3)对于正负交替出现的情况,可先观察其绝对值,再用$(-1)^n$或$(-1)^{n+1}$处理符号.

(4)对于周期数列,可考虑拆成几个简单数列之和的形式,或者利用周期函数,如三角函数等.

(5)对于选择题,一般可以对n赋值,然后逐一排除.

拓展　如图所示,将若干个点摆成三角形图案,每条边(包括两个端点)有$n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$个点,相应的图案中总的点数记为$a_n$,则$a_n=$________.



1.2　数列的函数特性

【学习目标】

了解数列是一种特殊函数.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点　数列的单调性

一般地,一个数列$\{a_n\}$,如果从第2项起,每一项都________它的前一项,即________,那么这个数列叫作________数列.如果从第2项起,每一项都________它的前一项,即________,那么这个数列叫作________数列.如果数列$\{a_n\}$的各项都________,那么这个数列叫作________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)通项公式为$a_n=\frac{1}{n}$的数列$\{a_n\}$是递减数列.　(　　)

(2)数列3,1,3,5,7,9是递增数列.　(　　)

(3)一个数列不是递增数列,就是递减数列.　(　　)

(4)把数列看作函数时,它的定义域是正整数集.　(　　)

(5)通项公式为$a_n=2n-1$的数列$\{a_n\}$与函数$y=2x-1$的图象相同.　(　　)

◆ 探究点一 数列与函数的关系

例 1 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{2}{2n-9}$，$n\in \mathbf{N}^*$，画出该数列的图象.

变式 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=n^2-8n+5$.

(1)写出这个数列的前5项，并作出它们的图象；

(2)这个数列中有没有最小项？

[素养小结]

一般而言，数列是一种特殊的函数.数列$\{a_n\}$是从正整数集$\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$)到实数集$\mathbf{R}$的函数，其自变量是序号n，对应的函数值是数列的第n项a_n，记为$a_n=f(n)$，其图象由一群孤立的点组成.

◆ 探究点二 数列的单调性

例 2 (1)若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n$，$n\in \mathbf{N}^*$，则数列$\{a_n\}$是 ( )

A. 递增数列 B. 递减数列

C. 常数列 D. 摆动数列

(2)已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\frac{3n-1}{2n}$，试判断数列$\{a_n\}$的增减性.

变式 已知数列$\{a_n\}$是递增数列，且其通项公式为$a_n=n^2+\lambda n(n\in \mathbf{N}^*)$，则实数$\lambda$的取值范围是 ( )

A. $\left(-\frac{7}{2},+\infty\right)$ B. $[0,+\infty)$

C. $[-2,+\infty)$ D. $(-3,+\infty)$

[素养小结]

由于数列是特殊的函数，所以可以用研究函数的思想方法来研究数列的相关单调性，要注意数列的定义域为正整数集或其有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$这一条件.

◆ 探究点三 数列的最大(小)项

例 3 在数列$\{a_n\}$中，$a_n=1+\frac{1}{2n-9}(n\in \mathbf{N}^*)$，求数列$\{a_n\}$的最大项和最小项.

变式 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-5n+4(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)数列$\{a_n\}$中有多少项是负数?

(2)求数列$\{a_n\}$的最小项.

[素养小结]

求数列$\{a_n\}$的最大项和最小项,一种方法是利用函数的最值法;另一种方法是利用不等式法,即求最小项可由$\begin{cases}a_n\leqslant a_{n+1},\\a_n\leqslant a_{n-1}\end{cases}$来确定$n$,求最大项可由$\begin{cases}a_n\geqslant a_{n+1},\\a_n\geqslant a_{n-1}\end{cases}$来确定$n$.若数列是单调的,也可由单调性来确定最大项或最小项,若数列的项是正负交替出现的,求最大项(或最小项),应在其正(或负)项中找.

拓展 已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=(n+1)\left(\frac{2023}{2024}\right)^n$,则当$a_n$取得最大值时,$n$的值为________.

§2 等差数列

2.1 等差数列的概念及其通项公式

第1课时 等差数列的概念及其通项公式

【学习目标】

理解等差数列的概念和通项公式的意义.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 等差数列的有关概念与表示

1. 等差数列与公差:对于一个数列,如果从第2项起,每一项与它的前一项的差都是同一个常数,那么称这样的数列为________数列,称这个常数为等差数列的________,通常用字母d表示.

2. 等差数列的递推公式:____________(d为常数,$n\in\mathbf{N}^*$).

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)数列16,32,48,64,80,96,112,128,…,320为等差数列. ( )

(2)若一个数列从第2项起,每一项与它的前一项的差都是常数,则这个数列一定是等差数列. ( )

◆ 知识点二 等差数列的通项公式及应用

通项公式:若首项是a_1,公差是d,则等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=$____________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若数列$\{a_n\}$满足$a_n=kn+b(n\in\mathbf{N}^*$,且$k,b$为常数),则数列$\{a_n\}$一定是等差数列. ( )

(2)若数列$\{a_n\}$满足$a_n=n^2,n\in\mathbf{N}^*$,则数列$\{a_n\}$是等差数列. ( )

(3)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_n=3n+2,n\in\mathbf{N}^*$,则等差数列$\{a_n\}$的公差是3. ( )

课中探究 考点探究 素养小结

◆ 探究点一 等差数列的概念

例1 (1)下列数列中不是等差数列的是 ( )

A. 0,0,0,…,0,…

B. $-2,-1,0,\cdots,n-3,\cdots$

C. $1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots$

D. $0,1,3,\cdots,\frac{n^2-n}{2},\cdots$

(2)(多选题)下列数列中,是等差数列的是 ( )

A. 1,4,7,10

B. lg 2,lg 4,lg 8,lg 16

C. $2^5,2^4,2^3,2^2$

D. 通项公式为$a_n=\begin{cases}1,n=1,\\n+1,n\geqslant 2\end{cases}$的数列$\{a_n\}$

[素养小结]

判断一个数列是不是等差数列,就是判断该数列从第2项起每一项与前一项的差是否为同一个常数,即验证$a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}_+)$是不是一个与$n$无关的常数.

◆ 探究点二　等差数列的通项公式

例2 已知数列$\{a_n\}$是等差数列,且$a_5=10$,$a_{12}=31$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$a_n=13$,求n的值.

变式 (1)已知数列$\{a_n\}$为等差数列,$a_4=2$,$a_7=-4$,则数列$\{a_n\}$的通项公式为 (　　)

A. $a_n=-2n+10$　　B. $a_n=-2n+5$

C. $a_n=-\frac{1}{2}n+10$　　D. $a_n=-\frac{1}{2}n+5$

(2)已知数列$\{a_n\}$是首项为1,公差为2的等差数列,若$a_m=m+7$,则$m=$________.

[素养小结]

等差数列的通项公式及其应用

(1)已知a_n,a_1,n,d中的任意三个量,可求出第四个量.

(2)由等差数列的通项公式可以求出该数列中的任意项,也可以判断某一个数是不是该数列中的项.

(3)根据等差数列的两个已知条件建立关于"基本量"a_1和d的方程组,求出a_1和d,从而确定通项公式,求得所要求的项.

◆ 探究点三　等差数列的判定和证明

例3 判断下列数列是否为等差数列.

(1)在数列$\{a_n\}$中,$a_n=3n+2,n\in\mathbf{N}^*$;

(2)在数列$\{b_n\}$中,$b_n=n^2+n,n\in\mathbf{N}^*$;

(3)数列$\{c_n\}$满足$c_1=c_2=1,c_n=c_{n-1}+2(n\geqslant3)$.

变式 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=pn+q$,其中p,q是常数,且$p\neq0$,判断数列$\{a_n\}$是否是等差数列.

[素养小结]

要判断数列$\{a_n\}$是否为等差数列可以用定义法,也可以直接看通项公式是否为$a_n=kn+b(k,b$为常数,$n\in\mathbf{N}^*)$的形式,若符合该形式,则该数列为等差数列,否则不是等差数列.

拓展 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_n\cdot a_{n-1}=2\cdot a_{n-1}-1,n\geqslant2$.

(1)求a_2,a_3,a_4;

(2)证明数列$\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$是等差数列,并求出数列$\{a_n\}$的通项公式.

第2课时　等差数列的性质及实际应用

【学习目标】

体会等差数列与一元一次函数的关系.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　等差中项

如果在 a 与 b 之间插入一个数 A,使 a,A,b 成等差数列,那么 A 叫作 a 与 b 的________,并且 $A=\dfrac{a+b}{2}$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若 $2b=a+c$,则 c,b,a 三个数成等差数列.(　)

(2)任意两个实数都存在等差中项.(　)

◆ 知识点二　等差数列的性质

1. 等差数列所有项的性质:

(1)若数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列,则$\{c+a_n\}$(c 为任意常数)是公差为________的等差数列;

(2)若数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列,则$\{c\cdot a_n\}$(c 为任意常数)是公差为________的等差数列;

(3)若数列$\{a_n\}$,数列$\{b_n\}$分别是公差为 d_1,d_2 的等差数列,且它们的项数相同,则数列$\{pa_n+qb_n\}$(p,q 为任意常数)是公差为__________的等差数列.

2. 等差数列部分项的性质

(1)若 $m+n=p+q=2k(m,n,p,q,k\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_m+a_n=a_p+a_q=2a_k$;

(2)在等差数列中,下标成等差数列的项仍是等差数列.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_2+a_4=a_6$.(　)

(2)若等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则数列$\{a_n+3\}$的公差为 $d+3$.(　)

(3)若数列 $a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$是等差数列,则数列 $a_1,a_3,a_5,\cdots$也是等差数列.(　)

◆ 知识点三　从函数的角度研究等差数列

1. 图象:等差数列$\{a_n\}$的通项公式可写成 $a_n=dn+(a_1-d)$.点(n,a_n)分布在一条以 d 为斜率的直线上,是这条直线上一列________.

2. 等差数列单调性:在等差数列$\{a_n\}$中,当______时,数列$\{a_n\}$是______数列;当______时,数列$\{a_n\}$是______数列;当______时,数列$\{a_n\}$是______数列.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)等差数列$\{a_n\}$的单调性是由公差 d 决定的.(　)

(2)若函数 $y=f(x)$是一次函数,且该函数的图象过第二、四象限,数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=f(n)$,则数列$\{a_n\}$是递减的等差数列.(　)

课中探究　考点探究　素养小结

◆ 探究点一　等差中项

例1 (1)在等差数列中,若 a 是2和6的等差中项,则 $a=$________.

(2)在3与15之间插入3个数,使这5个数成等差数列,则插入的3个数之和为(　)

A. 21　　B. 24

C. 27　　D. 30

变式 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$,且 $a_2=5,a_5=13$,则 $a_8=$________.

[素养小结]

实数 a,b,c 成等差数列的条件是 $b=\dfrac{a+c}{2}$(或 $2b=a+c$),该条件可用来进行等差数列的判定或求解有关等差中项的问题.如要证明数列$\{a_n\}$为等差数列,可通过证明对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 来实现.

◆ 探究点二　等差数列的性质

例2 (1)在等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_3+a_9=12$,$a_2=4$,则 $a_{10}=$(　)

A. 4　　B. 8　　C. 3　　D. 6

(2)在等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_3+a_8=10$,则 $3a_5+a_7=$________.

变式 (1)已知等差数列$\{a_n\}$中,a_5,a_{15}是函数$f(x)=x^2-3x-2$的两个零点,则$a_3+a_8+a_{12}+a_{17}=$ ( )

A. 2 B. 3

C. 4 D. 6

(2)在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_1+a_4+a_7=39$,$a_2+a_5+a_8=33$,则$a_3+a_6+a_9=$________.

[素养小结]

解决等差数列运算问题的一般方法:一是灵活运用等差数列的性质;二是利用等差数列的通项公式,转化为等差数列的首项与公差的函数关系求解.这些方法都运用了整体代换与方程的思想.

拓展 [2024·贵州铜仁高二期末] 在等差数列$\{a_n\}$中,$m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$,则"$a_m+a_n=a_p+a_q$"是"$m+n=p+q$"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

◆ 探究点三 等差数列与一次函数的关系

例3 (1)已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,点$P(a_n,a_{n+1})$是函数$y=x+\frac{1}{2}$图象上的点,则$a_9=$ ( )

A. 2 B. 3

C. 4 D. 5

(2)[2024·江苏淮安高二期末] 已知等差数列$\{a_n\}$中,$a_2=5$,$a_1+a_4=8$.

①求数列$\{a_n\}$的通项公式;

②画出数列$\{a_n\}$的图象;

③判断数列$\{a_n\}$的增减性.

变式 (1)已知等差数列$\{a_n\}$的各项均为正整数,且$a_9=2020$,则a_1的最小值是________.

(2)已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=16$,公差$d=-\frac{3}{4}$.

①等差数列$\{a_n\}$从第几项开始出现负数?

②当n为何值时,$|a_n|$最小?

[素养小结]

根据等差数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$,可知数列$\{a_n\}$为等差数列$\Leftrightarrow a_n=pn+q$($p,q$为常数).此结论可用来判断数列$\{a_n\}$是否为等差数列,也揭示了等差数列的函数本质.

◆ 探究点四 等差数列的实际应用

例4 假设体育场一角看台的座位从第2排起每一排都比前一排多相等数量的座位.若第3排有10个座位,第9排有28个座位,则第12排有多少个座位?

变式 (1)某著作中有这样一个问题:冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气,自冬至当日起,其最短日影长依次成等差数列,已知立春当日的最短日影长为9.5尺,春分当日的最短日影长为6尺,则立夏当日的最短日影长为 ( )

A. 16.5尺 B. 13尺

C. 3.5尺 D. 2.5尺

(2)把 100 个面包依次分给按一定顺序排列的 5 个人,使每人所得面包的个数成等差数列,且较多的三份面包的个数之和的 $\frac{1}{3}$ 是较少的两份面包个数之和,则最少的一份面包的个数为________.

[素养小结]

求解等差数列实际应用问题的关键是认真审题,挖掘出"等差"变化的含义,并进一步明确首项、公差、项数等基本量.

2.2 等差数列的前 n 项和

第 1 课时 等差数列的前 n 项和

【学习目标】

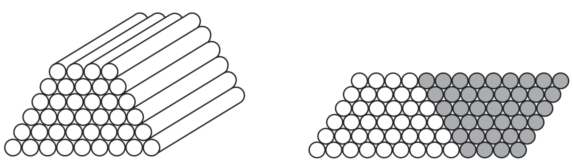
1. 探索并掌握等差数列的前 n 项和公式.
2. 理解等差数列的通项公式与前 n 项和公式的关系.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ **知识点一 倒序相加法**

如果在一个数列$\{a_n\}$中,与首末项等"距离"的两项之和等于首末两项之和,那么求和时可采用把正着写与倒着写的两个和式相加,这样就得到了一个常数列的和,进而求得数列$\{a_n\}$的前 n 项和,这一求和方法称为____________.

【诊断分析】如图①所示,某仓库堆放了一堆钢管,最上面的一层有 4 根钢管,下面的每一层都比上一层多一根钢管,最下面的一层有 9 根钢管,共有 6 层.



① ②

(1)假设在这堆钢管旁边倒放上同样的一堆钢管,其截面如图②所示,则这样共有________根钢管.

(2)原来有________根钢管.

◆ **知识点二 等差数列的前 n 项和公式**

1. 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式

$S_n=$____________$=$________$+\frac{n(n-1)}{2}d$.

两个公式的关系:把 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 中,就可以得到 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

2. 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$;

数列$\{a_n\}$是等差数列$\Leftrightarrow S_n=An^2+Bn$($A,B$ 为常数且 $A\neq0$).

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,则 S_n 与 a_n 不可能相等. ( )

(2)$S_n=2n^2+3n-1$ 是某个等差数列的前 n 项和. ( )

◆ **知识点三 S_n 与 a_n 的关系**

$$a_n=\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2.\end{cases}$$

课中探究 考点探究 素养小结

◆ **探究点一 等差数列的前 n 项和的基本运算**

例 1 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,前 n 项和为 S_n.

(1)若 $S_8=48,S_{12}=168$,求 a_1 和 d;

(2)若 $a_1=-2$, $a_2+a_6=2$,求 S_{10};

(3)若 $a_1=\frac{3}{2},d=-\frac{1}{2},S_n=-15$,求 n 和 a_{12}.

变式 已知数列$\{a_n\}$是公差为d的无穷等差数列,其前n项和为S_n,且$d=-4$,$S_5=40$,问:是否存在大于1的正整数k,使得$S_k=S_1$?若存在,求k的值;若不存在,说明理由.

[素养小结]

在等差数列的五个基本量a_1,a_n,d,n,S_n中,已知三个可求其余两个.求解时,通常先建立关于a_1与d的方程组,解出a_1与d后,再求其他量.

◆ 探究点二 S_n与a_n的关系

例2 已知S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,且$S_n=2n^2-30n$.

(1)求a_1及数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)判断数列$\{a_n\}$是否为等差数列,并说明理由.

变式 (1)[2024·天津耀华中学高二期末]已知$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-4n+1$,则$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|$的值为 ( )

A. 65 B. 67 C. 61 D. 56

(2)已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-3n+1$.

①求$\{a_n\}$的通项公式;

②判断数列$\{a_n\}$是否为等差数列,并说明理由.

[素养小结]

若S_n是关于n的二次函数,且不含常数项,则由S_n可求得a_n,数列$\{a_n\}$是等差数列;否则$a_n=\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2,\end{cases}$数列$\{a_n\}$不是等差数列.

第2课时 等差数列的前n项和的性质

【学习目标】

1. 掌握等差数列前n项和的性质.
2. 能利用等差数列前n项和的函数性质求前n项和的最值.
3. 能在具体的问题情境中,发现数列的等差关系,并解决相应的问题.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 等差数列的前n项和的性质

1. 若数列$\{a_n\}$是等差数列,S_n是其前n项的和,$k\in\mathbf{N}^*$,那么________,________,________成等差数列,如图所示.

$$\overbrace{\underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_k}_{S_k}+\underbrace{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}_{S_{2k}-S_k}+\underbrace{a_{2k+1}+a_{2k+2}+\cdots+a_{3k}}_{S_{3k}-S_{2k}}}^{S_{3k}}$$

2. 若S_n,T_n分别为等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和,那么$\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{a_n}{b_n}$.

3. 若数列$\{a_n\}$是等差数列,S_n是其前n项的和,则数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列.

4. 设数列$\{a_n\}$是公差为d的等差数列,$S_奇$是前n项中奇数项的和,$S_偶$是前n项中偶数项的和,则数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=S_奇+S_偶$,当等差数

列的项数 n 为奇数时，中间一项记为 $a_{中}$，有如下性质：

(1)当 n 为偶数时，$S_{偶}-S_{奇}=$________；

(2)当 n 为奇数时，则 $S_{奇}-S_{偶}=$________，$S_{奇}=$________，$S_{偶}=$________，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=$________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若$\{a_n\}$是等差数列，则 a_1+a_2，a_3+a_4，a_5+a_6 也是等差数列. (　　)

(2)若等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则 S_3，S_6，S_9 成等差数列. (　　)

◆ 知识点二　等差数列的前 n 项和的最值

1. 从二次函数的角度理解等差数列的前 n 项和公式：

公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$ 可化成关于 n 的表达式：$S_n=$____________. 当 $d\neq 0$ 时，S_n 关于 n 的表达式是一个常数项为零的二次函数关系式，即点(n,S_n)在其相应的________函数的图象上，这说明等差数列的前 n 项和公式是关于 n 的二次函数，它的图象是抛物线 $y=\frac{d}{2}x^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)x$ 上横坐标为正整数的一群孤立的点.

2. 等差数列前 n 项和的最值

(1)利用邻项变号法：

当 $a_1>0$，$d<0$ 时，S_n 有________值，使 S_n 取到最值的 n 可由不等式组$\begin{cases}a_n\geqslant 0,\\a_{n+1}\leqslant 0\end{cases}$确定；

当 $a_1<0$，$d>0$ 时，S_n 有________值，使 S_n 取到最值的 n 可由不等式组$\begin{cases}a_n\leqslant 0,\\a_{n+1}\geqslant 0\end{cases}$确定.

(2)利用二次函数的性质：

$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，若 $d\neq 0$，则从二次函数的角度看：当 $d>0$ 时，S_n 有________值；当 $d<0$ 时，S_n 有________值. 当 n 取最接近二次函数图象的对称轴的自然数时，S_n 取到最值.

【诊断分析】等差数列的前 n 项和都有最大值与最小值吗？

课中探究

◆ 探究点一　等差数列前 n 项和的性质

例 1 ［2024·江苏无锡高二期末］记等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $S_4=6$，$S_8=21$，则 $S_{12}=$____________.

变式 设等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{n+3}{3n+15}$，则$\frac{a_{10}}{b_{10}}=$ (　　)

A. $\frac{11}{36}$　　B. $\frac{23}{72}$

C. $\frac{7}{24}$　　D. $\frac{7}{23}$

[素养小结]

等差数列前 n 项和运算的三种思想方法：

(1)先利用已知条件求出首项和公差，再求所求，是基本解法，有时运算量大些.

(2)利用等差数列前 n 项和的性质，如果运用得当可以达到化繁为简、化难为易、事半功倍的效果.

(3)设而不求，整体代换也是很好的解题方法.

拓展 (1)一个等差数列的前 12 项的和为 354，前 12 项中偶数项的和与奇数项的和的比为 32∶27，求公差 d 的值.

(2)设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_4=11$，$S_{12}=9$，求 S_{20} 的值.

(3)已知数列$\{a_n\}$，数列$\{b_n\}$均为等差数列，数列$\{a_n\}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+2}{n+3}$，求$\frac{a_5}{b_5}$.

(4)已知 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_1=-2021$，$\frac{S_{2019}}{2019}-\frac{S_{2023}}{2023}=-4$，求 S_{2023}.

◆ 探究点二　等差数列前 n 项和的最值

例 2 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=25$,$S_{17}=S_9$,求前 n 项和 S_n 的最大值.

变式 [2024·河南开封高二期末] 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $a_3-a_5=a_4=4$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求 S_n 的最大值及取得最大值时 n 的值.

[素养小结]

求等差数列前 n 项和最值的常用思路:

(1)利用等差数列的单调性,求出其正、负转折项,便可求得和的最值;

(2)利用等差数列的性质求出其正、负转折项,便可求得和的最值;

(3)利用等差数列的前 n 项和 $S_n=An^2+Bn$(A,B 为常数)为关于 n 的二次函数,并结合二次函数的性质求最值.

◆ 探究点三　等差数列前 n 项和的实际应用

例 3 赵老师最近给自己制订了一个 180 千米的跑步健身计划,计划前面 5 天每天跑 4 千米,以后每天比前一天多跑 0.4 千米,则他要完成该计划至少需要　　(　　)

A. 23 天　　B. 24 天

C. 25 天　　D. 26 天

变式 已知 8 月份有一新款服装投入某市场. 8 月 1 日该款服装仅售出 3 件,以后每天售出的该款服装都比前一天多 3 件,当 8 月某日销售量达到最大(只有 1 天)后,每天售出的该款服装都比前一天少 2 件,已知 8 月 31 日当天刚好售出 3 件.

(1)问 8 月几日该款服装销售最多?最多售出几件?

(2)按规律,当该市场销售此款服装达到 200 件时,社会上就开始流行,而日销售量连续下降并低于 20 件时,则不再流行. 问该款服装在社会上流行几天?

[素养小结]

应用等差数列知识解决实际问题的关键是分清是数列$\{a_n\}$的通项公式问题还是前 n 项和问题,然后再选择合适的公式求解.

§3　等比数列

3.1　等比数列的概念及其通项公式

第1课时　等比数列的概念及其通项公式

【学习目标】

理解等比数列的概念和通项公式的意义.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　等比数列的相关概念**

等比数列与公比:如果一个数列从________起,每一项与它的前一项的比值都是同一个常数,那么称这样的数列为________数列,称这个常数为等比数列的________,通常用字母 q 表示($q\neq0$).

以上定义用符号表示为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 或 $a_{n+1}=qa_n$(q为常数,$n\in\mathbf{N}^*$).等比数列的定义用符号语言表示,其本质是等比数列的递推公式.

【诊断分析】是否存在数列既是等差数列又是等比数列?如果存在,试举出实例;如果不存在,请说明理由.

◆ **知识点二　等比数列的通项公式**

1. 通项公式:若首项是 a_1,公比是 q,则等比数列$\{a_n\}$的通项公式为______________.

2. 等比数列的图象

在公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$中,$a_n=a_1q^{n-1}$ 可改写成 $a_n=\frac{a_1}{q}q^n$,当 $q>0$ 且 $q\neq1$ 时,$y=q^x$ 是一个________函数,故此时等比数列$\{a_n\}$的图象是函数 $y=\frac{a_1}{q}q^x$ 的图象上____________.

3. 等比数列的单调性:由指数函数的性质可知

当 $a_1>0,q>1$ 时,等比数列$\{a_n\}$是递增数列;

当 $a_1<0,0<q<1$ 时,等比数列$\{a_n\}$是递增数列;

当 $a_1>0,0<q<1$ 时,等比数列$\{a_n\}$是递减数列;

当 $a_1<0,q>1$ 时,等比数列$\{a_n\}$是递减数列;

当 $q<0$ 时,等比数列$\{a_n\}$是摆动数列;

当 $q=1$ 时,等比数列$\{a_n\}$是常数列.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若数列$\{a_n\}$为等比数列,$a_1=2,a_5=8$,则 $a_3=\pm4$.　(　)

(2)在等比数列$\{a_n\}$中,如果公比为 q,且 $q<1$,那么等比数列$\{a_n\}$是递减数列.　(　)

(3)若$\{a_n\}$为等比数列,则$\{2^{a_n}\}$为等比数列.　(　)

课中探究　考点探究　素养小结

◆ **探究点一　等比数列的概念**

例1 (多选题)下列各数列一定是等比数列的是　(　)

A. $-1,2,-4,8$

B. $1,2,3,4$

C. $x-1,x-1,x-1,x-1$

D. $\frac{1}{a},\frac{1}{a^2},\frac{1}{a^3},\frac{1}{a^4}(a\neq0)$

变式 下列数列一定是等比数列的是　(　)

A. 数列 $1,2,6,18,\cdots$

B. 在数列$\{a_n\}$中,$\frac{a_2}{a_1}=2,\frac{a_3}{a_2}=2$

C. 常数列 $a,a,\cdots,a,\cdots$

D. 在数列$\{a_n\}$中,$\frac{a_{n-1}}{a_n}=q(q\neq0,n>1)$

[素养小结]

对于等比数列的概念题,一定要紧扣它的定义来处理.

◆ 探究点二　等比数列的通项公式

例2 已知等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

(1)若$a_1=1$,$a_4=8$,求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$a_n=625$,$n=4$,$q=5$,求a_1;

(3)若$a_2+a_5=18$,$a_3+a_6=9$,$a_n=1$,求n.

变式 已知递增等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数,且$a_1a_2a_6=64$,$a_1+a_3+a_5=21$,则$a_n=$　(　　)

A. 2^{n+1}　　B. 2^{n-1}

C. $3\times2^{n-1}$　　D. $2\times3^{n-1}$

[素养小结]

等比数列的通项公式涉及a_1,a_n,n,q四个量,只要知道其中任意三个就能求出另外一个,在这四个量中,a_1和q是等比数列的基本量,只要求出这两个基本量,问题便迎刃而解.

例3 已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的公比为q,则"$q>1$"是"$\{a_n\}$为递增数列"的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

变式 (1)(多选题)已知等比数列$\{a_n\}$为递减数列,则下列说法正确的是　(　　)

A. 当$a_1>0$时,$0<q<1$

B. 当$a_1>0$时,$q<0$

C. 当$a_1<0$时,$q>1$

D. $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<1$

(2)设数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列,则"$0<q<1$"是"$\{a_n\}$为递减数列"的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

◆ 探究点三　等比数列的证明

例4 [2024·山东泰安一中高二期末] 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$na_{n+1}=2(n+1)a_n$,试证明数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是等比数列,并求$\{a_n\}$的通项公式.

变式 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$a_n+S_n=n$.

(1)设$c_n=a_n-1$,求证:数列$\{c_n\}$是等比数列;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

[素养小结]

证明等比数列的常用方法:定义法、通项公式法、构造法.

在条件中出现$a_{n+1}=ka_n+b(k\neq0,b\neq0,k\neq1)$关系时,往往构造新数列,方法是把$a_{n+1}+x=k(a_n+x)$与$a_{n+1}=ka_n+b$对照,求出$x$即可.

拓展 已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足:$a_1=\lambda$,$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+n-4$,$b_n=(-1)^n(a_n-3n+21)$,其中$\lambda$为实数,$n$为正整数.

(1)证明:对于任意实数λ,数列$\{a_n\}$不是等比数列;

(2)试判断数列$\{b_n\}$是否可以为等比数列,并证明你的结论.

第2课时　等比数列的性质及实际应用

【学习目标】

体会等比数列与指数函数的关系.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　等比中项**

如果在 a 与 b 之间插入一个数 G,使得 a,G,b 成等比数列,那么根据等比数列的定义,$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$,$G^2=ab$,$G=\pm\sqrt{ab}$.我们称 G 为 a,b 的________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)任意两个非零常数 a,b 都有等比中项.　(　　)

(2)"$G^2=ab$"是"a,G,b 成等比数列"的充要条件.　(　　)

◆ **知识点二　等比数列的性质**

1. 等比数列任意两项间的关系:在等比数列$\{a_n\}$中,$a_n=$________.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中,若 $m+n=p+s(m,n,p,s\in\mathbf{N}^*)$,则______________.特别地,若 $m+n=2p$,则________.

3. (1)在公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$中,$a_m,a_{m+k},a_{m+2k},\cdots,a_{m+(n-1)k},\cdots$ 仍成等比数列,公比为________;

(2)若数列$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列,则数列$\{ka_n\}(k\neq0)$也是等比数列,公比为________;

(3)若数列$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列,则数列$\{a_n^2\}$也是等比数列,公比为________;

(4)若数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是项数相同的等比数列,则$\{a_n\cdot b_n\}$是________数列,$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$是________数列.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若数列$\{a_n\}$是等比数列,则$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等比数列.　(　　)

(2)若数列$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列,则$\{a_n\cdot a_{n+1}\}$仍是等比数列,且公比为 $2q$.　(　　)

(3)已知等比数列$\{a_n\}$,取其奇数项组成一个新数列,则此数列是等比数列.　(　　)

(4)若数列$\{a_n\}$是等比数列,则$\{a_n+a_{n+1}\}$一定是等比数列.　(　　)

(5)若$\{a_n\}$为等比数列,且 $m+n=p(m,n,p\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_m\cdot a_n=a_p$.　(　　)

课中探究　考点探究　素养小结

◆ **探究点一　等比中项**

例1 在等比数列$\{a_n\}$中,若 a_2,a_4 的等比中项为 1,a_6,a_8 的等比中项为 4,则 $a_5=$　(　　)

A. -2　　B. 2

C. ±2　　D. $\pm\frac{1}{2}$

变式 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_4=9$,且 a_2,a_4,a_{10} 构成等比数列,则$\{a_n\}$的公差 d 等于________.

[素养小结]

(1)由等比中项的定义可知 $\frac{G}{a}=\frac{b}{G}\Rightarrow G^2=ab\Rightarrow G=\pm\sqrt{ab}$,所以只有当 a,b 同号时,a,b 的等比中项有两个,当 a,b 异号时,a,b 没有等比中项.

(2)在一个等比数列中,从第二项起,每一项(有穷等比数列的末项除外)都是它的前一项和后一项的等比中项.

(3)a,G,b 成等比数列等价于 $G^2=ab(ab>0)$.

◆ **探究点二　等比数列的性质**

例2 (1)[2024·湖南郴州高二期末]已知等比数列$\{a_n\}$中,a_2,a_3 是方程 $x^2-6x+8=0$ 的两根,求 $a_1a_2a_3a_4$ 的值.

(2)在等比数列$\{a_n\}$中,$a_n>0$,若 $a_3\cdot a_5=4$,求 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$.

变式 已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数,且$a_3a_7=81$,则$\log_3a_1+\log_3a_5+\log_3a_9=$ ( )

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

[素养小结]

(1)应用等比数列的性质可以简化运算,当性质不能应用时,可以通过基本量法求解.

(2)等比数列中的设元技巧:当三个数成等比数列时,可设为$\frac{a}{q}$,a,aq;当四个数成公比为正数的等比数列时,可设为$\frac{a}{q^3}$,$\frac{a}{q}$,aq,aq^3.

拓展 在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中,$a_1a_5+2a_4a_6+a_5a_9=8$,则$a_3+a_7=$ ( )

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 4 D. $2\sqrt{2}$

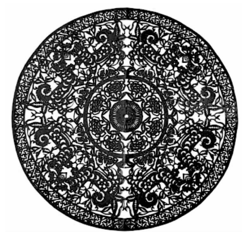
◆ **探究点三 等比数列的实际应用**

例3 某人买了一辆价值为13.5万元的新车,专家预测这种车每年按10%的速度贬值.

(1)用一个式子表示第$n(n\in\mathbf{N}^*)$年这辆车的价值;

(2)如果他打算用满4年时卖掉这辆车,他大概能得到多少钱?($0.9^4\approx0.66$,结果保留一位小数)

变式 (1)在我国古代春节期间,"剪窗花,贴对联"几乎是每家每户都会进行的迎新活动,而窗花(俗称剪纸)蕴含着辞旧迎新、接福纳祥的美好寓意.如图是一幅剪纸作品.一位艺术家把一张厚度为0.012 5 cm的纸对折了三次,开始了该作品的创作,若不计纸与纸之间的间隙,则对折后的半成品的厚度是________mm.



(2)某养猪场2021年年初猪的存栏数(饲养头数)为1500,预计以后每年存栏数的增长率为8%,且在每年年底卖出100头,则2036年年初猪的存栏数约为(参考数据:$1.08^{14}\approx2.9$,$1.08^{15}\approx3.2$,$1.08^{16}\approx3.4$) ( )

A. 2050 B. 2150

C. 2250 D. 2350

[素养小结]

解决等比数列实际应用问题的关键是:建立数学模型,即将实际问题转化成等比数列的问题,解数学模型即解等比数列问题.

3.2 等比数列的前n项和

第1课时 等比数列的前n项和

【学习目标】

1. 探索并掌握等比数列的前n项和公式.
2. 理解等比数列的通项公式与前n项和公式的关系.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ **知识点 等比数列的前n项和**

1. 等比数列$\{a_n\}$的前n项和公式

设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q\neq0)$,其前n项和为S_n,则当$q=1$时,$S_n=$________;当$q\neq1$时,$S_n=$________$=$________.

2. 当$q\neq1$时,两个公式的关系:把$a_1q^{n-1}=a_n$代入$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$中,就可以得到$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=4^n+a$,则a的值为1. ( )

(2)若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3^n+k$(k为常数),则数列$\{a_n\}$不可能是等比数列. ( )

(3)$1+x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{1-x^n}{1-x}$. ( )

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　等比数列的前n项和的基本运算

例1　在等比数列$\{a_n\}$中,公比为q,前n项和为S_n.

(1)若$a_1=1,a_5=16$,且$q>0$,求S_7;

(2)若$S_n=189,q=2,a_n=96$,求a_1和n.

变式　(1)设数列$\{a_n\}$为等比数列,若$a_2+a_3+a_4=2,a_3+a_4+a_5=4$,则数列$\{a_n\}$的前6项和为 ( )

A. 18　　B. 16　　C. 9　　D. 7

(2)已知数列$\{a_n\}$为等比数列,其前n项和为S_n,前三项和为13,前三项积为27,则$S_5=$________.

[素养小结]

等比数列前n项和的运算注意事项:

(1)基本量的计算常列方程组求解,一般用约分或两式相除的方法进行消元,有时会用到整体代换,如q^n,$\dfrac{a_1}{1-q}$都可看作一个整体.

(2)若公比q不确定,则要判断$q=1$还是$q\neq1$,若两种情况都有可能,则要分类讨论.

◆ 探究点二　等比数列前n项和的实际应用

例2　某公司从2020年年初起生产某种高科技产品,初始投入资金为1000万元,到年底资金增长50%.预计以后每年资金增长率与第一年相同,但每年年底公司要扣除消费资金x万元,余下资金再投入下一年的生产.设第n年年底扣除消费资金后的剩余资金为a_n万元(2020年为第1年).

(1)用x表示a_1,a_2,并写出a_{n+1}与a_n的关系式;

(2)若该公司希望5年后企业剩余资金达3000万元,试确定每年年底扣除的消费资金x的值(精确到万元).

变式　有一个人进行徒步旅行,他6天共走了189千米,第一天健步行走,从第二天起因脚痛每天走的路程为前一天的一半.则此人第4天和第7天共走了________千米.

[素养小结]

求解数列应用题的具体方法步骤:

(1)确认是等差数列问题、等比数列问题,还是含有递推关系的数列问题,是求a_n,还是求S_n,特别要注意准确弄清项数是多少.

(2)抓住数量关系,将文字语言翻译成数学语言,将数量关系用数学式子表达,将实际问题抽象为数学问题.

(3)求解数学问题,检验所得结果,并将符合要求的结果转化为实际问题的结论.